СКУПОВИ И ОПЕРАЦИЈЕ СА СКУПОВИМА

Деф: **Скуп** представља неуређену колецију чланова. Ти чланови унутар скупа. Називају се његовим елементима.

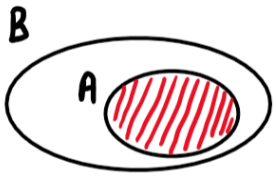
$x \in A$, $x \notin A$.

Скупове обележавамо великим штампаним латиничним словима, а елементе скупова набрајамо унутар **витичастих заграда**.

пр: а) $A = \{1,2,3,4\}$ б) $B = \{*, \square, \triangle\}$ в) $C = \{БГ, НС, ВА\}$

Скуп који нема елемената назива се **празан скуп.** $A = \emptyset$ или $A = \{\ \}$ ~~$C = \{\emptyset\}$~~

Деф: За скуп А, кажемо да је **подскуп** скупа В, ако је сваки елемент скупа А, уједно и елемент скупа В.



$A \subset B$ - Скуп А је **подскуп** скупа В.

Подскуп неког скупа је увек прво празан скуп, а потом цео скуп, затим Набрајамо једночлане скупове, потом двочлане, трочлане,....

пр: $A = \{1,2,3\}$

$A_1 = \emptyset$ $A_2 = A$ $A_3 = \{1\}$ $A_4 = \{2\}$ $A_5 = \{3\}$

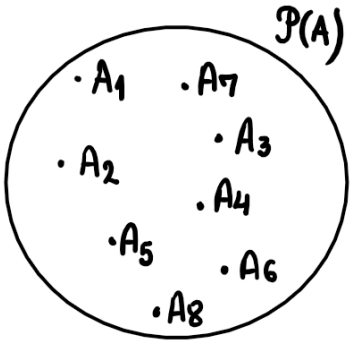
$A_6 = \{1,2\}$ $A_7 = \{1,3\}$ $A_8 = \{2,3\}$

$\{1,2,3\} = \{3,1,2\} = \{2,1,3\} = \{\underbrace{1,1,1,1}_{1},2,2,3,3\}$

Деф: **Партитивни скуп скупа А**, у ознаци P(A), је скуп свих подскупова скупа А. $P(A) = \mathcal{P}(A)$

пр: $A = \{*, \square, \triangle\}$ $\mathcal{P}(A) = ?$

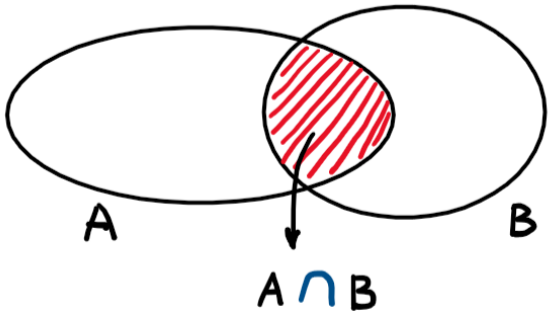
$A_1 = \emptyset$
$A_2 = A$
$A_3 = \{*\}$
$A_4 = \{\square\}$
$A_5 = \{\triangle\}$
$A_6 = \{*, \square\}$
$A_7 = \{*, \triangle\}$
$A_8 = \{\square, \triangle\}$



$\mathcal{P}(A) = \{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_8\}$

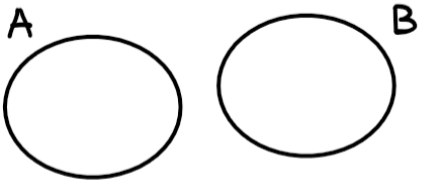
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{*\}, \{\square\}, \{\triangle\}, \ldots\}$

Деф: **Пресек скупова А и В** , у ознаци $A \cap B$, је нови скуп који садржи заједничке елементе скупова А и В. Другим речима, скуп који садржи исте елементе из скупа А и В.



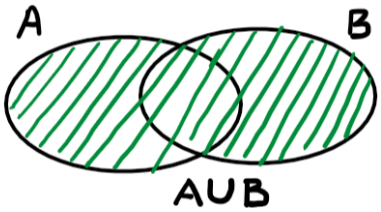
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

За два скупа који немају пресек (**пресек је празан скуп**), тј. немају заједничке (исте) елементе, кажемо да су **дисјунктни** (раздвојени, одвојени).



$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A, B$ – Дисјунктни.

Деф: **Унија скупова А и В**, у ознаци $A \cup B$, је нови скуп који садржи елементе бар једног од скупова А или В. Приликом набрајања елемената исписујемо све елементе оба скупа, али без понављања истих.



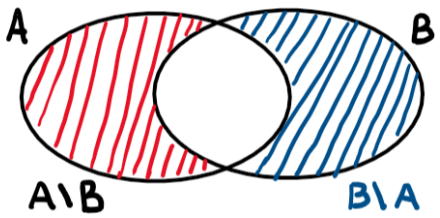
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Пр: $A = \{1, 2, 3, *, a, \square\}$ $B = \{2, 3, 5, \square, b\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, *, a, \square, 5, b\}$

$A \cap B = \{2, 3, \square\}$

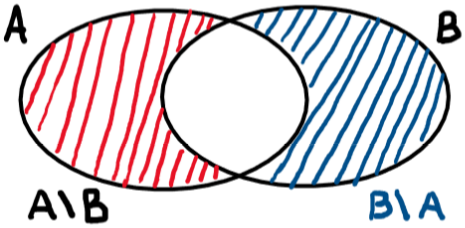
Деф: **Разлика скупова А и В**, у ознаци $A \setminus B$, је нови скуп који садржи елементе који се налазе у скупу А, а нема их у скупу В.



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Деф: **Симетрична разлика** два скупа А и В, је унија скупова А\В и В\А.

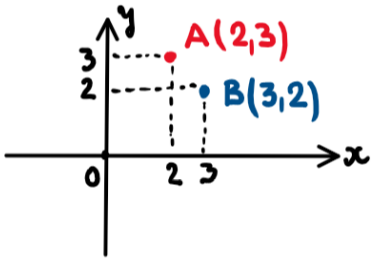
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

- Нека су А и В два непразна скупа и нека $a \in A,\ b \in B$.

Кажемо да је пар (a, b) **уређен пар** или "**уређена двојка**", само ако је a-"прва компонента" , b- "друга компонента".



$(2,3) \neq (3,2)$

$\boxed{(a,b) \neq (b,a)}$

Деф: Декартов производ скупова А и В, у ознаци $A \times B$, ("А Декартово В", "А Декартов производ В", "А крст В", "А икс В"), је скуп свих **уређених парова** (a, b), али таквих да је $a \in A,\ b \in B$.

пр: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{*, \square\}$

$A \times B = \{(1,*);\ (1,\square);\ (2,*);\ (2,\square);\ (3,*);\ (3,\square)\}$

$B \times A = \{(*,1);\ (*,2);\ (*,3);\ (\square,1);\ (\square,2);\ (\square,3)\}$

ВАЖНО !!!! $A \times B \neq B \times A$

1. **Нека су дати скупови:** $A = \{1,2,3,4,5\},\quad B = \{*, 2, 4, \blacksquare\},\quad C = \{x \mid x \in N \ \wedge\ x \in (1,4]\},\quad D = \{1,3\}$
Одреди скупове:
a) $(A \cup B) \cap C$ **b)** $(C \cup B) \setminus A$ **c)** $B \times C$ **d)** $D \times B$ **e)** $A \Delta B$ **f)** $(A \cap C) \setminus (B \setminus D)$ **g)** $\mathcal{P}(C)$

$C = \{2,3,4\}$

a) $(A \cup B) \cap C = \{1,2,3,4,5,*,\blacksquare\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3,4\} = C$

b) $(C \cup B) \setminus A = \{2,3,4,*,\blacksquare\} \setminus \{1,2,3,4,5\} = \{*,\blacksquare\}$

c) $B \times C = \{(*,2);\ (*,3);\ (*,4);\ (2,2);\ (2,3);\ (2,4);\ (4,2);\ (4,3);\ (4,4);\ (\blacksquare,2);\ (\blacksquare,3);\ (\blacksquare,4)\}$

d) $D \times B = \{(1,*);\ (1,2);\ (1,4);\ (1,\blacksquare);\ (3,*);\ (3,2);\ (3,4);\ (3,\blacksquare)\}$

e) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1,3,5\} \cup \{*,\blacksquare\} = \{1,3,5,*,\blacksquare\}$

f) $(A \cap C) \setminus (B \setminus D) = \{2,3,4\} \setminus \{*,2,4,\blacksquare\} = \{3\}$

g) $\mathcal{P}(C) = \{C_1, C_2, C_3, \ldots, C_8\}$

$C = \{2,3,4\}$

$C_1 = \emptyset$
$C_2 = C$
$C_3 = \{2\}$
$C_4 = \{3\}$
$C_5 = \{4\}$
$C_6 = \{2,3\}$
$C_7 = \{2,4\}$
$C_8 = \{3,4\}$

Укупан број подскупова неког скупа се рачуна помоћу формуле:

2^n

2. **Дати су скупови:** $A = \{x \mid x \in N \ \wedge \ x \leq 4\}$, $B = \{y \mid y \in N \ \wedge \ y$ – делилац броја $12\}$, $C = \{z \mid z \in N \ \wedge z$ се садржи у броју $20\}$.

Одредити скупове:

а) $(A \cup B) \cap (B \setminus C)$ $b)$ $A \cup B \cup C$ $c)$ $(A \cap C) \cup (A \cap B)$

$d)$ $(A \cap B) \setminus (B \cup C)$ $e)$ $A \setminus B \setminus C$

$A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{1,2,3,4,6,12\}$ $C = \{1,2,4,5,10,20\}$

а) $(A \cup B) \cap (B \setminus C) = \{1,2,3,4,6,12\} \cap \{3,6,12\} = \{3,6,12\}$

$b)$ $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,6,12,5,10,20\}$

$c)$ $(A \cap C) \cup (A \cap B) = \{1,2,4\} \cup \{1,2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

$d)$ $(A \cap B) \setminus (B \cup C) = \{1,2,3,4\} \setminus \{1,2,3,4,6,12,5,10,20\} = \emptyset$

$e)$ $A \setminus B \setminus C =$

3. **Дат је скуп** $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$**. Одреди скупове** $A = \left\{x \mid x \in S \wedge \frac{2x}{12-x} \in S\right\}$ **и** $B = \{y \mid y \in S \wedge \left(\frac{y^2}{2} - y\right) \in S\}$ **, а затим одредити скупове:**

$a)$ $A \cup B$ $b)$ $A \cap B$ $v)$ $A \setminus B$ $g)$ $\mathcal{P}(A \setminus B)$

Да бисмо одредили елементе скупова А и В , узимамо редом, један по један елемент из скупа S, мењамо у формулу којом су дефинисани скупови А и В , рачунамо и проверавамо да ли тај резултат поново припада скупу S.

$x = 0$: $\frac{2x}{12-x} = \frac{2 \cdot 0}{12-0} = \frac{0}{12} = 0 \in S$

$x = 1$: $\frac{2 \cdot 1}{12-1} = \frac{2}{11} \notin S$

$x = 2$: $\frac{2 \cdot 2}{12-2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \notin S$

$\vdots$

$A = \{0,4,6,8,9\}$ $B = \{0,2,4\}$

$a)$ $A \cup B = \{0,4,8,2,6,9,8\}$

$b)$ $A \cap B = \{0,4\}$

$v)$ $A \setminus B = \{6,8,9\}$

$g)$ $\mathcal{P}(A \setminus B) = \{\emptyset, \{6,8,9\}, \{6\}, \{8\}, \{9\}, \{6,8\}, \{6,9\}, \{8,9\}\}$

4. **(Задатак за оцену врло добар (4)) : Одредити :** $a)$ $\mathcal{P}(\emptyset)$ $b)$ $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ $v)$ $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$

(за вежбу код куће)

а) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

б) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ — ЈЕДНОЧЛАНИ СКУП

в) $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ — ДВОЧЛАНИ СКУП

5. **Дати су скупови :** $A=\{x\,|x\in\mathbb{Z}\wedge x^2\leq 4\}$, $B=\{x\mid x\in\mathbb{N}_0\wedge x-2<3\}$, $C=\{x\,|x\in\mathbb{Z}\ \wedge\ x|12\}$, $D=\{x|x-\text{прост број}\ \wedge\ x<8\}$, $E=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\ \wedge\ |x|\leq 3\}$, $F=\{x\,|x\in\mathbb{N}_0\ \wedge\ |x|<4\}$.
Одредити скупове:

а) $(A\cup B)\backslash(C\cup D)$ ***b***) $(A\backslash B)\cup(C\backslash D)$ ***v***) $(A\cap B)\backslash(C\cap D)$ ***g***) $(A\backslash B)\cap(C\backslash D)$
d) $(E\cap F)\cup(F\cap D)$ ***e***) $(F\backslash D)\cap(B\backslash E)$

Деф: За природан број p већи од 1, $(p\in\mathbb{N},\mathrm{p}>1)$ кажемо да је **прост број**, ако и само ако има **тачно два различита природна делиоца** и то **јединицу и самог себе**. Сваки број који није прост је сложен број.

- Број 1 није ни прост ни сложен број.

$$p\in\{2\,,3,5,7,11,13,17,23,29\ldots.\}$$

- Број 2 је **први, најмањи** и **једини паран** прост број.

$x|12$ дели број 12

$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,6,\ldots.\}$ $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,4,5,6,\ldots.\}$

$A=\{-2,-1,0,1,2\}$ $B=\{0,1,2,3,4\}$ $C=\{1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,12,-12\}$
$D=\{7,5,3,2\}$ $E=\{1,-1,2,-2,3,-3,0\}$ $F=\{0,1,2,3\}$

а) $(A\cup B)\backslash(C\cup D)=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}\backslash\{1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,12,-12,7,5\}=\{0\}$
b) $(A\backslash B)\cup(C\backslash D)=\{-2,-1\}\cup\{1,-1,-2,-3,4,-4,6,-6,12,-12\}=\{1,-1,-2,-3,4,-4,6,-6,12,-12\}$
v) $(A\cap B)\backslash(C\cap D)=\{0,1,2\}\backslash\{2,3\}=\{0,1\}$
g) $(A\backslash B)\cap(C\backslash D)=\{-2,-1\}\cap\{1,-1,-2,-3,4,-4,6,-6,12,-12\}=\{-1,-2\}$
d) $(E\cap F)\cup(F\cap D)=\{1,2,3,0\}\cup\{2,3\}=\{0,1,2,3\}$
e) $(F\backslash D)\cap(B\backslash E)=\{0,1\}\cap\{4\}=\varnothing$

6. **(Вене , 59.)** **Дати су скупови** $A=\{a,b,c\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $C=\{1,2\}$. **Одреди:**
а) $A\times B$ ***b***) $(A\times B)\times C$ ***v***) $A\times(B\times C)$

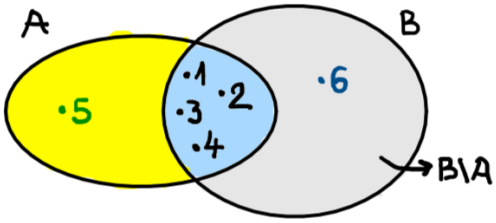
а) $A\times B=\{(a,\alpha);(a,\beta);(a,\gamma);(b,\alpha);(b,\beta);(b,\gamma);(c,\alpha);(c,\beta);(c,\gamma)\}$
b) $(A\times B)\times C=\{((a,\alpha),1);((a,\alpha),2);((a,\beta),1);((a,\beta),2);((a,\gamma),1);((a,\gamma),2);$
$((b,\alpha),1);((b,\alpha),2);((b,\beta),1);((b,\beta),2);((b,\gamma),1);((b,\gamma),2);$
$((c,\alpha),1);((c,\alpha),2);((c,\beta),1);((c,\beta),2);((c,\gamma),1);((c,\gamma),2)\}$

7. **(Вене, 63.)** **Одреди скупове** A **и** B **, чији су елементи цели бројеви и који задовољавају следеће једнакости:**

а) $A\cup B=\{x\mid 1\leq x<7\}$, $A\cap B=\{x\ \mid\ 1\leq x\leq 4\}$, $6\notin A$, $5\notin B\backslash A$

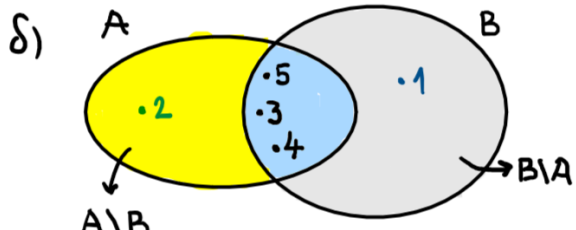
b) $A\cup B=\{x\mid 1\leq x\leq 5\}$, $A\cap B=\{x\ \mid\ 2<x<6\}$, $1\notin A\backslash B$, $2\notin B\backslash A$

а)



$A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{1,2,3,4,6\}$

б)



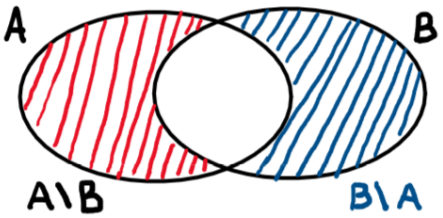
$A=\{2,3,4,5\}$
$B=\{1,3,4,5\}$

8. Дати су скупови $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $Q = \{1, 2, 3, 7\}$. Одредити скупове:

$a)\ P \Delta Q$ $\quad b)\ Q \Delta P$ $\quad v)\ (P \Delta Q) \Delta Q$ $\quad g)\ (P \Delta Q) \Delta (P \cup Q)$

Деф: **Симетрична разлика** два скупа A и B, је унија скупова A\B и B\A.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



$A \Delta B = (A \setminus B \cup (B \setminus A)$

a) $P \Delta Q = (P \setminus Q) \cup (Q \setminus P) = \{4,5\} \cup \{7\} = \{4,5,7\} = M$

б) $Q \Delta P = (Q \setminus P) \cup (P \setminus Q) = \{7\} \cup \{4,5\} = \{4,5,7\}$

в) $(P \Delta Q) \Delta Q = \underbrace{\{4,5,7\}}_{M} \Delta Q = (M \setminus Q) \cup (Q \setminus M) = \{4,5\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,4,5\}$

г) $(P \Delta Q) \Delta (P \cup Q) = M \Delta \underbrace{\{1,2,3,4,5,7\}}_{R} = (M \setminus R) \cup (R \setminus M) = \phi \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$

ДОМАЋИ ЗАДАТАК: **Вене - ова збирка, задаци: 28, 32, 36, 37, 39 (1°), 60, 61, 62.**